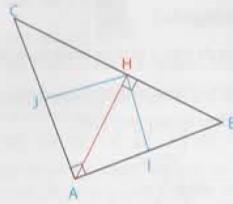


150 PROBLÈME DE SYNTHÈSE

ABC est un triangle rectangle en A, I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC] et H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont orthogonales. On va employer plusieurs méthodes, utilisant des outils différents, pour prouver ce résultat.

**1. Avec le produit scalaire**

a. Montrer que :

$$\vec{HB} \cdot \vec{HC} = -AH^2.$$

b. En déduire que $\vec{HI} \cdot \vec{HJ} = 0$, puis conclure.

2. Avec des configurations du plan

a. Montrer que le cercle circonscrit au triangle AIJ passe par le milieu de [BC].

b. En déduire que H appartient à ce cercle et conclure.

3. Avec le théorème de Pythagore

a. On note $x = AB$, $y = AC$ et $z = BC$.

Exprimer HI , HJ et IJ en fonction de x , y et z .

b. En utilisant le triangle HIJ, conclure.

PISTE : question 1. Décomposer les vecteurs en utilisant le point A.
question 3. a. Utiliser les triangles ABH et ACH.