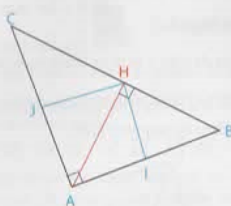


150 PROBLÈME DE SYNTHÈSE

ABC est un triangle rectangle en A, I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC] et H est le projeté orthogonal de A sur [BC]. On veut démontrer que les droites (HI) et (HJ) sont orthogonales. On va employer plusieurs méthodes, utilisant des outils différents, pour prouver ce résultat.



1. Avec le produit scalaire

a. Montrer que :

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -AH^2.$$

b. En déduire que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HJ} = 0$, puis conclure.

2. Avec des configurations du plan

a. Montrer que le cercle circonscrit au triangle AIJ passe par le milieu de [BC].

b. En déduire que H appartient à ce cercle et conclure.

3. Avec le théorème de Pythagore

a. On note $x = AB$, $y = AC$ et $z = BC$.

Exprimer HI, HJ et IJ en fonction de x , y et z .

b. En utilisant le triangle HIJ, conclure.

PISTE : question 1. Décomposer les vecteurs en utilisant le point A.

question 3. a. Utiliser les triangles ABH et ACH.