Nombre dérivé

—

Voir le cours en ligne : https://www.lesbonsprofs.com/notion/mathematiques-1e/fonctions-derivation/nombre-derive. Le lien vers cette vidéo se trouve à gauche de l'icône sur laquelle vous avez cliqué pour ouvrir ce document-ci.

$f'(a)$ est le taux d'accroissement (coefficient directeur, pente) de la tangente à la courbe représentative de f en A.
$f'(a)$ est appelé nombre dérivé de f en a.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La fonction dérivée f' est la fonction, qui à x associe le nombre $f'(x)$ tel qu'il est défini ci-dessus.

Nous pouvons facilement déterminer les fonctions dérivées des fonctions de référence.

$\boldsymbol{f(x) = x^2}$

f est définie sur $\mathbb{R}$. Nous allons vérifier qu'elle est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour cela nous calculons $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$:

Pour tous réels a et h, h non nul, on a :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \quad \text{(On remplace } x \text{ par } a+h \text{ dans l'expression de } f(x)\text{)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{h(2a+h)}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=2a+h$$

Ainsi :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}2a+h=2a$$

Comme $2a$ existe pour tout a réel, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f'(x)=2x$.

Fonction inverse : $f(x)=\frac{1}{x}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Pour tous x et a de $\mathbb{R}^*$, tels que $a+h\neq 0$,

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{-h}{ah(a+h)}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{-1}{a(a+h)}$$

Ainsi :

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$$

La fonction dérivée de la fonction inverse existe donc sur $\mathbb{R}^*$ et est définie par $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

Fonction racine carrée : $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x}}$

f est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Pour tous a *de* $\mathbb{R}^+$ et h de $\mathbb{R}^*$, tels que $a + h \geq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$$

On ne peut pas calculer la limite de cette expression lorsque h tend vers 0.

On multiplie donc en haut et en bas par la quantité conjuguée de $\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)$:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\left(\sqrt{a+h}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a + h - a}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$$

Ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$f'(a)$ existe lorsque $x > 0$. Donc la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$