T^{ale} S 4

Mathématiques
Contrôle n°5 (1 heure)

Lundi 30 novembre 2 015

Exercice 1 : (3,5 points)

On donne des fonctions définies par les formules suivantes. Sans étudier la dérivabilité, calculer l'expression de la fonction dérivée.

1) $f(x)=\sqrt{2x^2+4x+5}$ 2) $g(x)=\dfrac{1}{(2x-8)^5}$ 3) $h(x)=e^{-x^2+1}$

Exercice 2 : (11,5 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{2x}-e^{x}+1$.

1) Etudier, suivant les valeurs de X, le signe de l'expression X^2-X+1
2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Etude d'une fonction et d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+2-\dfrac{3e^x}{e^x+1}$.

1) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.
3) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4) Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6) La courbe C_f admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y=x$? Justifier

Exercice 3 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}$

Un logiciel de calculs affiche le résultat suivant que l'on pourra admettre.

```
1 f(x):=(1+x)*sqrt(1-x^2)
```

$x \;->(1+x)*(\sqrt{1-x^2})$ M

```
2 factoriser(f'(x))
```

$\dfrac{-x^2+1-x^2-x}{\sqrt{-x^2+1}}$ M

Autrement dit, $f'(x)=\dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Par des calculs, retrouver cette expression de $f'(x)$.
2) Déterminer les points en lesquels la courbe représentative C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3) Démontrer que la courbe représentative C_f a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite T d'équation $y=1+x$.
4) (BONUS) Etudier la position relative de T et de C_f.

Mathématiques
Contrôle n°5 (1 heure)

Lundi 30 novembre 2 015

Exercice 1 : (3,5 points)

On donne des fonctions définies par les formules suivantes. Sans étudier la dérivabilité, calculer l'expression de la fonction dérivée.

1) $f(x) = \sqrt{2x^2+4x+5}$ 2) $g(x) = \dfrac{1}{(2x-8)^5}$ 3) $h(x) = e^{-x^2+1}$

Exercice 2 : (11,5 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - e^x + 1$.

1) Etudier, suivant les valeurs de X, le signe de l'expression $X^2 - X + 1$
2) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x.

Partie B : Etude d'une fonction et d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x+1}$.

1) Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.
3) En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.
4) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
6) La courbe C_f admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$? Justifier

Exercice 3 : (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

Un logiciel de calculs affiche le résultat suivant que l'on pourra admettre.

```
1 f(x):=(1+x)*sqrt(1-x^2)
```

$$x \to (1+x)*(\sqrt{1-x^2})$$

```
2 factoriser(f'(x))
```

$$\frac{-x^2+1-x^2-x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

Autrement dit, $f'(x) = \dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) Par des calculs, retrouver cette expression de $f'(x)$.
2) Déterminer les points en lesquels la courbe représentative C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3) Démontrer que la courbe représentative C_f a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite T d'équation $y = 1 + x$.
4) (BONUS) Etudier la position relative de T et de C_f.