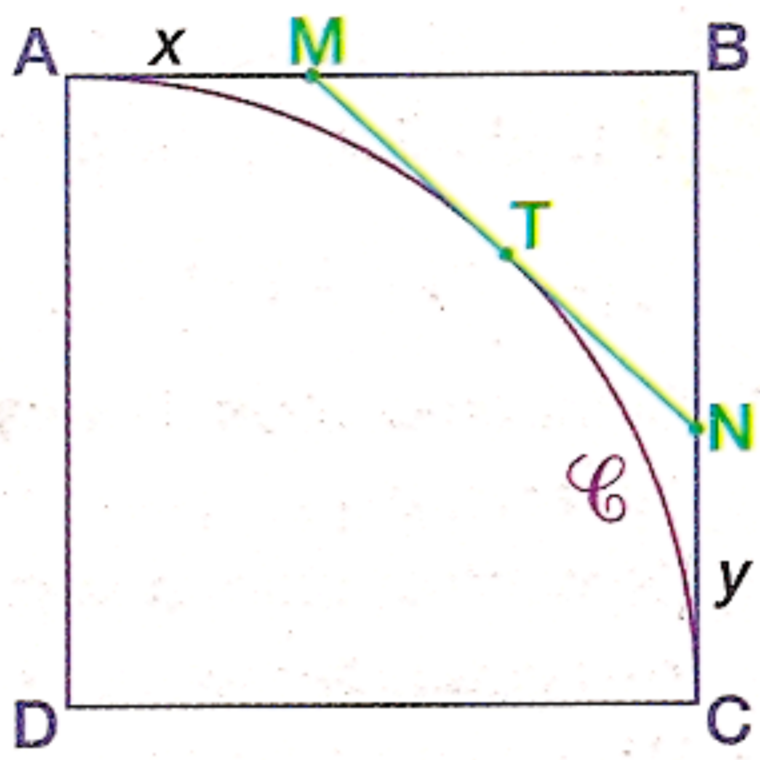
Optimisation

Pour ces exercices, vous pouvez vous reporter aux exercices 41 à 43, *Pour apprendre à chercher.*

88 ABCD est un carré ; AB = 1 . $\mathscr{C}$ est le cercle de centre D et de rayon 1. T est un point de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AC}$, distinct de A et de C.
La tangente au cercle $\mathscr{C}$ en T coupe le segment [AB] en M et le segment [BC] en N.



On se propose de résoudre le problème suivant :
Pour quelles positions de T la distance MN est-elle minimale ?
Pour cela, on essaie d'exprimer MN en fonction d'une variable x, par exemple en posant $AM = x$. Mais le calcul de MN en fonction de x seul paraît impossible *a priori*. On introduit alors une autre variable y (on pose $CN = y$), en espérant que les calculs permettront d'exprimer y en fonction de x.

1. Démontrez que $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

2. Prouvez que $MN = x + y$ et que $MN^2 = (x + y)^2$.

3. Déduisez-en que $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}$, puis que $MN = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$.

4. a) Dressez le tableau de variations de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{x + 1}, \; x \in [0\,;1].$$

b) Déduisez-en que la distance MN est minimale lorsque $x = \sqrt{2} - 1$.

5. Calculez y lorsque $x = \sqrt{2} - 1$
Déduisez-en la position de T pour laquelle la distance MN est minimale.