53 Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O et de rayon 3 et A le point de coordonnées $(0; 6)$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminez une équation du cercle $(\mathcal{C})$.

2° Soit m un nombre réel et $(\mathcal{D}_m)$ la droite passant par A et de coefficient directeur m. Déterminez une équation de $(\mathcal{D}_m)$.

3° Démontrez que les abscisses x des points communs à $(\mathcal{C})$ et à $(\mathcal{D}_m)$ sont les solutions de l'équation :

$(1 + m^2)x^2 + 12mx + 27 = 0$ (équation E).

4° *a)* Calculez le discriminant Δ_m de E.

b) Pour quelles valeurs de m l'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D}_m)$ ne contient-elle qu'un seul point ?

c) Déduisez-en les équations des tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par A.

1) Soit $M(x; y)$ un point de (C).
Alors $OM = 3 \Leftrightarrow OM^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$$

Donc $\boldsymbol{(C): x^2 + y^2 = 9}$

2) Puisque a pour coefficient directeur m, il existe un réel p tel que :

$$D_m : y = mx + p$$

$A(0; 6)$ appartient à D_m, donc : $m \times 0 + p = 6 \quad \Leftrightarrow p = 6$

L'équation de D_m est : $\boldsymbol{D_m : y = mx + 6}$

3) Soit $M(x; y)$ un point appartenant à (C) et à D_m.
Alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = mx + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (mx+6)^2 = 9 \\ y = mx + 6 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{(E) : (1 + m^2)x^2 + 12mx + 27 = 0}$$

4) a) Calcul du discriminant de *(E)* :

$$\Delta_m = (12m)^2 - 4 \times 27(1 + m^2) = 144m^2 - 108m^2 - 108 = 36m^2 - 108$$

b) L'intersection de (C) et de D_m ne contient qu'un seul point ssi $36m^2 - 108 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $m = \sqrt{3}$ *ou* $m = -\sqrt{3}$

c) Les tangentes à (C) coupent (C) en un seul point.
Celles d'entre elles qui passent par A ont pour équation : $y = mx + 6$.
Or les droites passant par A et coupant (C) en un seul point ont pour coefficient directeur $\sqrt{3}\ ou\ -\sqrt{3}$.

Les tangentes à (C) passant par A sont donc les droites d'équation :

$$y = x\sqrt{3} + 6\ et\ y = -x\sqrt{3} + 6$$