Second degré – Méthode

1) Mise sous forme canonique :

Pour tout x réel, $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$.
f est un polynôme du 2^{nd} degré.

$$3x^2 - 7x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}\right)$$
$$= 3(x^2 - 2\left(\frac{7}{6}\right)x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 - (\frac{7}{6})^2 + \frac{1}{3})$$
$$= 3((x - \frac{7}{6})^2 - (\frac{7}{6})^2 + \frac{1}{3})$$
$$= 3(\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36})$$
$$= 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$$

Donc la forme canonique de f est $f(x) = 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{12}$

2) Formules permettant de trouver les racines d'un polynôme du second degré :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0$$
$$= a\left(x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathrm{ab}^2}{4a^2} + \frac{\mathrm{ac}}{a})$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$
$$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$
$$= a(\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) \text{ , en posant } \Delta = b^2 - 4ac$$

<u>1er Cas :</u> $\Delta > 0$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$= a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \;\; ou \;\; x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \;\; ou \;\; x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc $f(x)$ admet 2 solutions réelles distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2ème Cas : $\Delta = 0$

$$f(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$
$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x_0=-\frac{b}{2a}$$

Donc $f(x)$ admet une unique solution double $x_0=-\frac{b}{2a}$

3ème Cas : $\Delta < 0$

$$f(x)= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$
$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

Or $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ et $\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2>0$

Alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2>0$, donc $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 \neq 0$ pour tout x réel.

Donc f n'admet pas de racine.

3) Factorisation d'un polynôme du second degré

a) En utilisant la forme canonique

Soit $f(x)=x^2+3x-5$

Pour tout x réel,

$$x^2+3x-5 = x^2+2\left(\frac{3}{2}\right)x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-5$$
$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-5$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}$$
$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2$$
$$= (x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2})(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})$$

Donc $f(x) = (x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2})(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})$

b) En utilisant des formules du cours

Soit $f(x) = x^2 + 3x - 5$

D'après le cours, lorsque $\Delta > 0, f$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2, et :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Or $f(x)$ est un polynôme du 2^{nd} degré, donc $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (3)^2 - 4(1)(-5) = 29$

Comme $\Delta > 0$, $f(x) = 0$ admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)-\sqrt{29}}{2(1)} = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)+\sqrt{29}}{2(1)} = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$

Donc $f(x) = 0$ admet 2 solutions : $x_1 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$

Donc $f(x) = (x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2})(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})$

4) Signe d'un polynôme du second degré

a) Exemples

Soit $P(x) = x^2 - 6x - 2$

P est un polynôme du 2^{nd} degré, alors $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-6)^2 - 4(1)(-2) = 44$

Comme $\Delta > 0$, alors $P(x) = 0$ admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{44}}{2(1)} = 3 - \sqrt{11}$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{44}}{2(1)} = 3 + \sqrt{11}$

Tableau de signes : $a = 1 > 0\ et\ \Delta = 44 > 0$

x	$-\infty$		$3-\sqrt{11}$		$3+\sqrt{11}$		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $P(x) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; 3-\sqrt{11}] \cup [3+\sqrt{11}; +\infty[$
$P(x) < 0$ ssi $x \in]3-\sqrt{11}\,; 3+\sqrt{11}[$

- Soit $Q(x) = -3x^2 + 3x + 4$

Q est un polynôme du 2nd degré, alors $\Delta = b^2 - 4ac$
$= (3)^2 - 4(-3)(4) = 57$

Comme $\Delta > 0$, alors $Q(x)$ admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)-\sqrt{57}}{2(-3)} = \frac{3+\sqrt{57}}{6}$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3)+\sqrt{57}}{2(-3)} = \frac{3-\sqrt{57}}{6}$

Tableau de signes : $a = -3 < 0$ et $\Delta = 57 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{57}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{57}}{6}$		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $Q(x) \leq 0$ ssi $x \in]-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{6}] \cup [\frac{3+\sqrt{57}}{6}; +\infty[$
$Q(x) > 0$ ssi $x \in]\frac{3-\sqrt{57}}{6}; \frac{3+\sqrt{57}}{6}[$

- Soit $R(x) = -7x^2 + 4x - 10$

$R(x)$ est un polynôme du 2nd degré, alors $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-7)(10) = 296$

Comme $\Delta > 0$, alors $Q(x)$ admet 2 solutions réelles distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(4)-\sqrt{296}}{2(-7)} = \frac{2-\sqrt{74}}{7}$
$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(4)+\sqrt{296}}{2(-7)} = \frac{2+\sqrt{74}}{7}$

Tableau de signes : $a = -7 < 0$ et $\Delta = 296 > 0$

x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{74}}{7}$		$\frac{2+\sqrt{74}}{7}$		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $Q(x) \leq 0$ ssi $x \in]-\infty; \frac{2-\sqrt{74}}{7}] \cup [\frac{2+\sqrt{74}}{7}; +\infty[$
$Q(x) > 0$ ssi $x \in]\frac{2-\sqrt{74}}{7}; \frac{2+\sqrt{74}}{7}[$

a) Démonstration dans le cas général :

1[er] cas : $\Delta > 0$

Alors *f* est factorisable :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

f admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
a	*Sgn a*		*Sgn a*		*Sgn a*
f(x)	*Sgn a*	0	$Sgn(-a)$	0	*Sgn a*

2ème cas : $\Delta = 0$

Alors *f* est factorisable :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$x + b/2a$	$-$	0	$+$
a	*Sgn a*		*Sgn a*
f(x)	*Sgn a*	0	$Sgn(a)$

3ème cas : $\Delta < 0$

Alors *f* n'est pas factorisable :

D'après **2)**,

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right),$$

avec $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 > 0$ pour tout *x* réel.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$	$+$
a	*Sgn a*
f(x)	$Sgn(a)$

5) Résoudre des équations en utilisant la méthode la plus rapide

Soit $P(x) = x^2 - 4x + 3$ (forme développée)
on admet que :
$P(x) = (x-2)^2 - 1$ (forme canonique)
et $P(x) = (x-3)(x+1)$ (forme factorisée)

a) Pour $P(x) = 0 \rightarrow$ forme factorisée

$(x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \; ou \; x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3 \; ou \; x = -1$

b) Pour $P(x) = 3 \rightarrow$ forme développée

$x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$
$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$

c) Pour $P(x) = -10 \rightarrow$ forme canonique

$(x-2)^2 - 1 = -10 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 9 = 0$
donc comme $(x-2)^2 + 9 > 0$ pour tout x réel, cette équation n'admet pas de solution.

d) Pour $P(x) = -1 \rightarrow$ forme canonique

$(x-2)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 = 0$

e) Pour $P(x) = 4 \rightarrow$ forme canonique

$(x-2)^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \left(x - 2 - \sqrt{5}\right)\left(x - 2 + \sqrt{5}\right) = 0$
$\Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{5} = 0 \; ou \; x - 2 + \sqrt{5} = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 2 + \sqrt{5} \; ou \; x_2 = 2 - \sqrt{5}$

f) Pour $P(x) = x^2 \rightarrow$ forme développée

$x^2 - 4x + 3 = x^2 \Leftrightarrow -4x + 3 = 0$
$\Leftrightarrow -4x = -3$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

6) Représentation de graphique

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

a) Comme f est une fonction du 2^{nd} degré, sa courbe représentative est une parabole.

b) Il existe 3 moyens pour trouver les coordonnées du sommet :

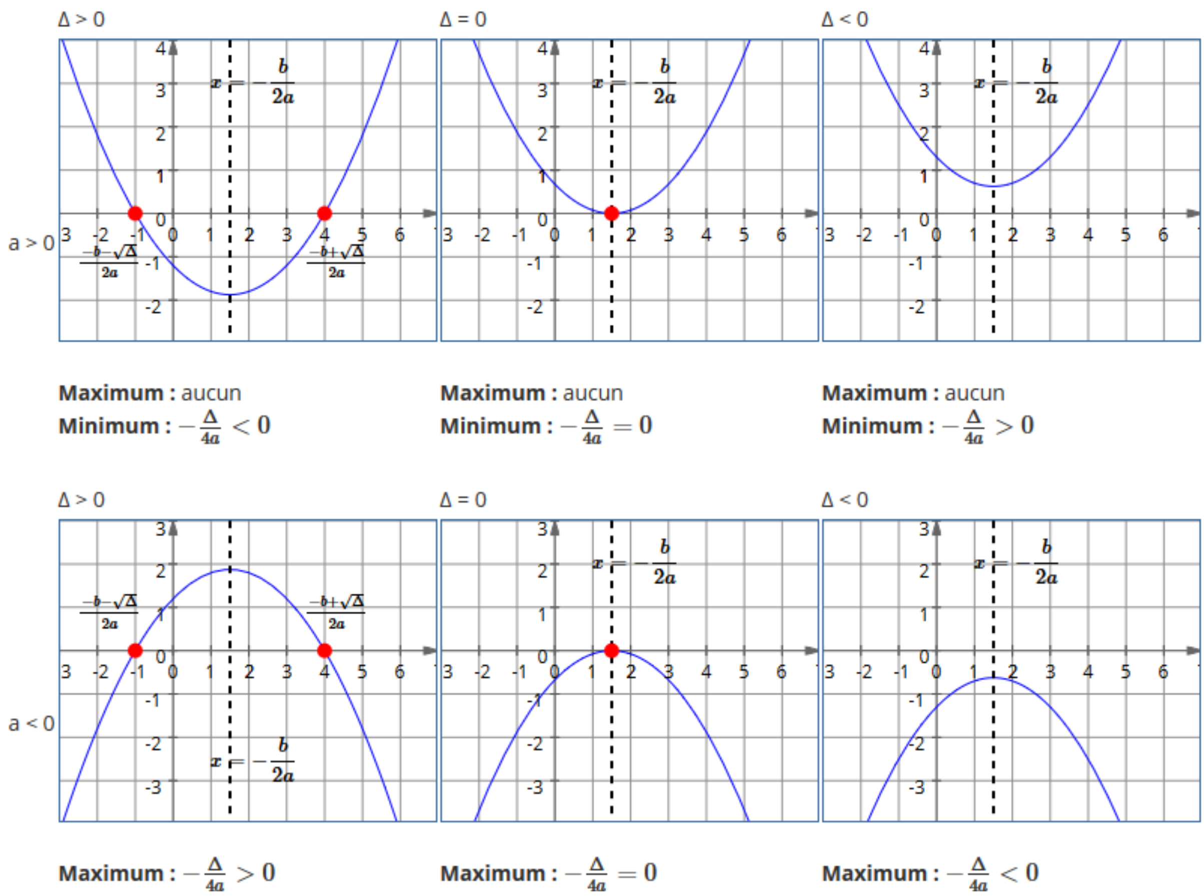
1- Mettre la fonction sous forme canonique puis trouver α et β
2- Appliquer les formules du cours : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{b^2-4ac}{4a}$
3- Dériver la fonction puis étudier son extremum

c) Une fonction du 2^{nd} degré a pour courbe représentative une parabole.

Les racines de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Le signe de $f(x)$ varie selon les valeurs du discriminant :

- Si $\Delta > 0$, alors f est du signe de $-a$ entre les deux racines réelles et du signe de a en dehors des racines.
- Si $\Delta = 0$, alors f est du signe de a avant et après l'unique racine double.
- Si $\Delta < 0$, alors f est du signe de a.



7) Application

Exercice I

a) Soit $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3$$
$$= x^3-y^3$$

b) Soit a et b deux nombres distincts tels que : $a-b=65$ et $a^3-b^3=647\,855$.

$$\begin{cases} a-b=65 \\ a^3-b^3=647\ 855 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=65 \\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=647\,855 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=65 \\ 65(a^2+ab+b^2)=647\,855 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=65 \\ a^2+ab+b^2=9\,967 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2=65^2 \\ a^2+ab+b^2=9\,967 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2ab+b^2=4225 \quad (1) \\ a^2+ab+b^2=9\,967 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+65 \\ 3ab=5742 \quad (2)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+65 \\ ab=\frac{5742}{3}=1914 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+65 \\ b(b+65)=1914 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+65 \\ b^2+65b-1914=0 \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré en b : $b^2+65b-1914=0$

Alors $\begin{cases} a=65+b \\ b=-87 \ ou\ b=22 \end{cases} \Leftrightarrow a=-22\ et\ b=-87\ \boldsymbol{ou}\ a=87\ et\ b=22$

Donc les solutions sont $a_1=-22\ et\ b_1=-87$ **ou** $a_2=87\ et\ b_2=22$.

Exercice II

Soit n un nombre tel que $n = \overline{ab} = 10a + b$ et *n'* le nombre obtenu en inversant les chiffres composant *n* : $n' = \overline{ba} = 10b + a$.

Par hypothèse, $n \times n' = 4275$

Donc : $n \times n' = 4275 \Leftrightarrow (10a + b) \times (10b + a) = 4275$

$$\Leftrightarrow 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275$$

Comme de plus, par hypothèse, la somme des chiffres de *n* est égale à 65, le problème revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 12^2 \\ 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 144 \quad (\times 10) \\ 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 144 \\ 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10a^2 + 20ab + 10b^2 = 1440 \quad (1) \\ 10a^2 + 101ab + 10b^2 = 4275 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ 81ab = 2835 \;\; (2) - (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ ab = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ b(12 - b) = 51 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ b^2 - 12b + 35 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 - b \\ b = 7 \; ou \; b = 5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = 12 - 7 = 5 \; et \; b = 7 \quad \boldsymbol{ou} \; a = 12 - 5 = 7 \; et \; b = 5$

Le nombre cherché est donc 57 (ou 75)