

Exercice 4

(1)

PARTIE A

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Provenons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{-x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-(-x)}}{-(-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x e^x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x e^x} = +\infty$$

Ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Provenons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0 \quad \text{d'après le résultat précédent}$$

PARTIE B

$f(x) = (ax+b)e^{-x}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in [1; +\infty[$

1) Calculons b pour que la tangente à f au point d'abscisse 1 soit horizontale.

Il suffit de trouver b pour que $f'(1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \geq 1, \quad f'(x) &= a e^{-x} - (ax+b)e^{-x} \\ &= (a - ax - b)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\text{donc } f'(1) = 0 \Leftrightarrow (a - a - b)e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -b e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 0$$

(2)

Donc $f(x) = ax e^{-x}$

2) Valeur de a pour que le toboggan soit situé entre 3,5 m et 4 m de haut

$$\begin{aligned} \text{On a vu que } f'(x) &= (a - ax)e^{-x} \\ &= a(1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

Puisque a est un entier naturel et $e^{-x} > 0$ pour tout x , $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$ sur $[1; +\infty[$.

Ce qui signifie que $f'(x) < 0$ sur $[1; +\infty[$.

Donc f atteint son maximum en $x_0 = 1$.

Il suffit donc de trouver a tel que :

$$3,5 \leq f(1) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 3,5 \leq ae^{-1} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 3,5e \leq a \leq 4e$$

$$\Rightarrow 9,52 \leq a \leq 10,8$$

Comme a est un entier, il convient de choisir

$$\begin{aligned} a &= 10 \\ f(x) &= 10x e^{-x} \end{aligned}$$

3) Le toboggan se rapproche-t-il de plus en plus du sol?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 10x e^{-x} = 0 \quad \text{d'après A.}$$

donc c'est bien le cas -

1) Variations de $f'(x)$ sur $[1;8]$

$$\forall x \in [1;8] \quad f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [1;8] \quad f''(x) &= 10[-1 - 1 + x]e^{-x} \\ &= 10(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$ sur $[1;8]$
car $e^{-x} > 0$ pour tout x réel.

x	1	2	8
$f''(x)$	-	0	+
f'	0	$-10e^{-2}$	$-70e^{-8}$

$$-10e^{-2} \approx -1,35$$

$$-70e^{-8} \approx -0,023$$

2) Proveons que $\tan \alpha = |f'(x)|$

Par définition, $\tan \alpha = \frac{MP}{PL} \quad \left(\frac{\text{opp}}{\text{adj}} \right)$

$$= \left| \frac{y_M - y_P}{x_P - x_L} \right|$$

$$= \left| \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} \right| \quad \text{car } \begin{cases} x_P = x_M \\ y_P = y_L \end{cases}$$

$\tan \alpha$ est donc le taux d'accroissement, en valeur absolue
ie le coeff directeur en valeur absolue de (T)

Or la valeur absolue de (T) est aussi $|f'(x)|$

donc $|f'(x)| = \tan \alpha$.

3) D'après 1), $|f'(x)|$ est max lorsque $x=2$, et alors $\tan \alpha \approx 1,35$
ne pas oublier de mettre la calc. en degrés $\alpha \approx 53,5^\circ$