Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires du plan.

On souhaite montrer que la décomposition de tout vecteur $\vec{w}$ selon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est unique, c'est-à-dire que s'il existe quatre réels x, y, x' et y' tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et $\vec{w} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

1) Montrer que si $x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$ alors :

$$(x - x')\vec{u} = (y' - y)\vec{v}.$$

2) Montrer que si $x \neq x'$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3) Conclure.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires.

$$x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow x\vec{u} - x'\vec{u} = y'\vec{v} - y\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow (x - x')\vec{u} = (y' - y)\vec{v} \ \ (1)$$

Si $x \neq x', alors : \ \vec{u} = \frac{(y'-y)}{(x-x')}\vec{v}$, ce qui équivaut que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Or par hypothèse, u et v ne sont pas colinéaires, donc $x = x'$

Donc : (1) $\Leftrightarrow (y' - y)\vec{v} \ = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow y' - y = 0 \ ou \ \vec{v} \ = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow y' = y \text{ car on a supposé } \vec{v} \text{ non nul}$$

CQFD