DS 6	Mathématiques	1ère S
2 h	Dérivation et applications – Probabilités	*Jeudi 10 mars 2016*

Exercice 1 : (7 points)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait piocher à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

Pour chaque boule blanche piochée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge piochée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur. Le joueur tire deux fois successivement et **sans remise** une boule de l'urne.

1. **a)** Déterminer les différentes valeurs prises par la variable aléatoire X.

   b) Démontrer que $P(X=-1)=\frac{20n}{(10+n)(9+n)}$ (on pourra construire un arbre pondéré).
2. Exprimer, en fonction de n, la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.
3. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, vaut : $E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(10+n)(9+n)}$.
4. **a)** Démontrer que ce jeu ne peut pas être équitable, quelle que soit la valeur de n.

   b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles le jeu est favorable au joueur.

Exercice 2 : (3,5 points)

Une classe de première S d'un lycée compte 24 élèves dont 10 filles. Leur professeure de mathématiques interroge toujours un élève au début de chaque cours mais comme elle est très distraite, elle ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés !... Soit n un entier positif ou nul. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles interrogées lors de n cours consécutifs.

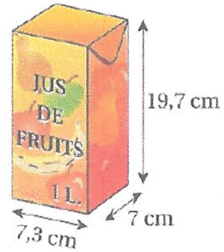
1. On suppose que $n=10$. Quelle est la loi de probabilités de X ? Justifier.
2. Montrer que la probabilité qu'exactement 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs, est égale à 0,25 à 10^{-2} près.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins 3 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
4. Une période de combien de cours consécutifs faut-il considérer pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001?
5. Une année scolaire comporte environ 150 cours de mathématiques. A combien peut-on estimer le nombre de filles qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques ?

Exercice 3 : (4 points)

Un artisan fabrique des objets. Il ne peut pas en produire plus de 70 par semaine. On suppose que tout objet fabriqué est vendu. Le coût de production de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;7]$ par :
$f(x)=0{,}1x^2+0{,}2x+0{,}3$.
Chaque objet est vendu 80€. On note $g(x)$ la recette de la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros.

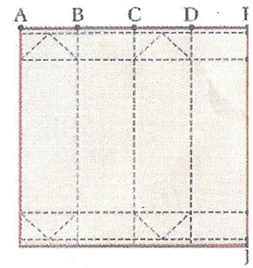
1. Justifier que $g(x)=0{,}8x$.
2. Le bénéfice réalisé par la production et la vente de x dizaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par une fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;7]$.
a. Montrer que $B(x)=-0{,}1x^2+0{,}6x-0{,}3$.
b. Pour quel nombre d'objets fabriqués et vendus le bénéfice est-il maximum ?

Exercice 4 : (5,5 points)



L'entreprise Tetra Pak propose des emballages parallélépipédiques à base presque carrée qui contiennent 1 litre. Les dimensions du modèle « jus de fruit » sont données ci-contre.
L'objet de ce problème est de déterminer les dimensions d'un emballage parallélépipédique à base carrée contenant 1 litre qui nécessite un minimum de carton pour sa fabrication.

1. Notons h la hauteur de la boîte et x la longueur d'un côté de sa base carrée (les dimensions sont en cm). En tenant compte de son volume, déterminer h en fonction de x. *Rappel : 1 litre = 1 dm³.*



2. Le patron de la boîte est un grand rectangle constitué de rectangles tels que :
$AB=BC=CD=DE=x\,;\ FG=HI=\frac{x}{2}\,;$
$EF=IJ=\frac{4}{5}\ cm\ ;\ GH=h$
Calculer l'aire de ce patron en fonction de h et de x, puis uniquement en fonction de x.
3. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=4x^2+\frac{32}{5}x+\frac{4000}{x}$. Montrer que sa dérivée est du signe de $5x^3+4x^2-2500$.
4. Etudier les variations de la fonction $g: x\mapsto 5x^3+4x^2-2500$ sur $[0;+\infty[$.
5. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;10]$. Donner, en expliquant la démarche, une valeur approchée de α à 0,1 près. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
6. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
7. Les dimensions du modèle « jus de fruit » sont-elles proches des dimensions optimales en ce qui concerne la consommation de carton pour la fabrication d'une boîte à base carrée ?