

1) Pour la construction:

- Tracer une droite.
- Piquer en O et placer deux points A et C sur cette droite, à équidistance de O .
- Construire la médiatrice de $[AC]$. y placer D et B tels que $OA = OB = OC = OD$. On obtient le carré $ABCD$.
- Prendre un écartement de compas inférieur au côté du carré et placer les points $EFGH$.

2) Repère

Comme $ABCD$ est un carré, il est pratique de choisir $(A; \vec{AB}; \vec{AD})$ comme repère.

Coordonnées des points E, F, G et H dans $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$

- $\vec{AE} = \frac{a}{a+b} \vec{AB}$ donc $E(\frac{a}{a+b}; 0)$
- $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}$
 $= \vec{AB} + \frac{a}{a+b} \vec{BC}$
 $= \vec{AB} + \frac{a}{a+b} \vec{AD}$ donc $F(1; \frac{a}{a+b})$
- $\vec{AG} = \vec{AD} + \vec{DG}$
 $= \vec{AD} + \frac{b}{a+b} \vec{DC}$
 $= \vec{AD} + \frac{b}{a+b} \vec{AB}$ donc $G(\frac{b}{a+b}; 1)$
- $\vec{AH} = \frac{b}{a+b} \vec{AD}$ donc $H(0; \frac{b}{a+b})$

Proverons que $EFGH$ est un carré

Comme $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$ est un repère orthonormal, il nous suffit de prouver que:

- les diagonales $[EG]$ et $[HF]$ sont de même longueur: $EG = HF$
- les mêmes diagonales sont perpendiculaires: $\vec{EG} \cdot \vec{HF} = 0$
- Elles se coupent en leur milieu.

- [EG] et [HF] de même longueur

$$\vec{EG} \left(\frac{b-a}{a+b}; 1 \right) \quad \text{et} \quad \vec{HF} \left(1; \frac{a-b}{a+b} \right)$$

$$EG^2 = \left(\frac{b-a}{a+b} \right)^2 + 1^2 = HF^2$$

$$\text{donc } EG = HF$$

- [EG] et [HF] perpendiculaires

$$\vec{EG} \cdot \vec{HF} = \frac{b-a}{a+b} + \frac{a-b}{a+b} = 0 \quad \text{donc } \vec{EG} \perp \vec{HF}$$

- [EG] et [HF] se coupent en leur milieu

$$\text{milieu de [EG]} : \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{milieu de [HF]} : \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$$

Comme [EG] et [HF] se coupent perpendiculairement en leur milieu et ont même longueur, EFGH est un carré

Rq Pour le 2^{ème} point, si vous n'avez pas encore vu le produit scalaire, on s'y prend de manière différente.

- On peut prouver que les diagonales de EFGH se coupent en leur milieu (3^{ème} point). EFGH est un parallélogramme.
- Puis (1^{er} point) les diagonales ont même longueur. EFGH est donc un rectangle.
- Reste à prouver soit que :
 - $EH = EF$
 - $(EG) \perp (HF)$

Il est très facile de prouver que $EH = EF$:

D'après le th de Pythagore ds le triangle AEH rectangle en A,

$$EH^2 = a^2 + b^2$$

D'après le th de Pythagore ds le triangle EFB rectangle en B,

$$EF^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{donc } EH^2 = EF^2 \Leftrightarrow EH = EF \quad (\text{car } EH > 0 \text{ et } EF > 0)$$

On peut aussi utiliser les coordonnées :

$$\vec{EH} \left(\frac{-a}{a+b}; \frac{b}{a+b} \right) \quad \vec{EF} \left(1 - \frac{a}{a+b}; \frac{a}{a+b} \right) \quad \vec{EF} \left(\frac{-b}{a+b}; \frac{a}{a+b} \right)$$