Formule du binôme de Newton

Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$.
Par définition, le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad \text{où : } n! = n(n-1)(n-2)\times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

1. Prouver que pour tous n et p entiers naturels tels que $n \geq p$, on a :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Utiliser ce résultat pour démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

Pour tous réels a et b non nuls, pour tout entier naturel n non nul,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{(n-k)}\, b^k$$