

143

1. a. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 - z)(1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}) = 1 - z^n.$$

b. En déduire que $z^n = 1$ si, et seulement si, $z = 1$ ou $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

2. On pose $\omega = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

a. Vérifier que $\omega^5 = 1$, puis que $\omega^4 = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \bar{\omega}^2$.

b. On pose $u = \omega + \omega^4$ et $v = \omega^2 + \omega^3$.

Montrer que $u + v = uv = -1$.

c. Déterminer une équation du second degré dont u et v sont les deux solutions.

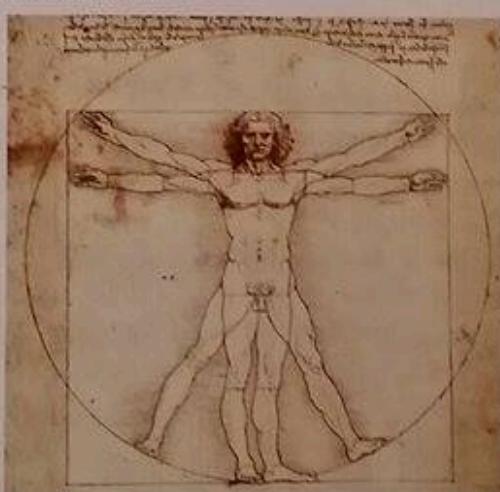
d. En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$, puis celle de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

3. Soit A_i le point d'affixe ω^i pour i entier naturel.

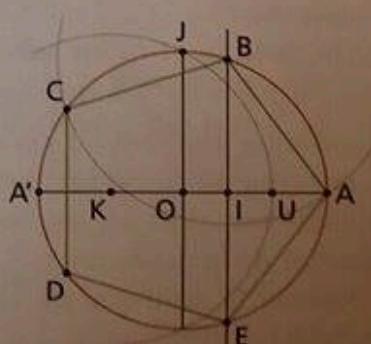
a. Montrer que $A_i = A_{i+5}$. Quelles sont les coordonnées de A_1 ?

b. Pour tout i , calculer OA_i , puis A_iA_{i+1} .

On dit alors que le pentagone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.



4. La figure ci-contre a été construite par la méthode de Ptolémée (Alexandrie, 85 – 165 après J.-C.).
K est le milieu de $[OA]$ et I le milieu de $[OU]$.
Avec les résultats de la question 2., justifier cette construction.



K milieu de $[OA]$ et I milieu de $[OU]$

1. a) Démontrer que pour z de \mathbb{C} , $(1 - z)(1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1}) = 1 - z^n$
b) En déduire que :

$$z^n = 1 \text{ si et seulement si } z = 1 \text{ ou } 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$$

2. On pose $\varpi = e^{2i\frac{\pi}{5}}$.

a) Vérifier que $\varpi^5 = 1$, puis que $\varpi^4 = \bar{\varpi}$ et $\varpi^3 = \bar{\varpi}^2$.

b) On pose $u = \varpi + \varpi^4$ et $v = \varpi^2 + \varpi^3$.

Montrer que : $u + v = uv = -1$.

c) Déterminer une équation du second degré dont u et v sont solutions.

d) En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$, puis de $\cos \frac{4\pi}{5}$.

3. Soit A_i , le point d'affixe ϖ^i pour tout entier naturel i .

a) Montrer que $A_i = A_{i+5}$.

Quelles sont les coordonnées de A_1 ?

b) Pour tout i , calculer OA_i , puis A_iA_{i+1} .

On dit alors que le pentagone $A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

4. La figure ci-contre a été réalisée par la méthode de Ptolémée (Alexandrie 85 – 165 après J.-C.)

K est le milieu de $[OA']$ et I le milieu de $[OU]$. Avec les résultats de la question 2., justifier cette construction.

