Exercice n° 2 (6 points)

ABC est un triangle.

Soit G, le point tel que $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et soit H, le point tel que $5\overrightarrow{HA}-3\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

1°- Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Construire G.

2°- Montrer que $\overrightarrow{AH}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Construire H.

3°- Démontrer que les points A, G et H sont alignés.

1. Montrons que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}=0$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AC}=0$$
$$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{GB}-2\overrightarrow{GC}$$
$$2\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}$$

2. De la même manière : $\boldsymbol{AH=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

3. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AH}$ colinéaires car $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ donc les points A, G et H sont alignés.

Exercice n° 3 (11 points)

A, B, C et D sont, dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, quatre points tels que A(3 ;3), B(-1 ; -1), C(-2 ;-3) et D(3 ; -3).

La figure donnée ci-dessous pourra être compléter.

1°- Déterminer les coordonnées du point E tel que BCDE soit un parallélogramme.

2°- Soit L, le centre de BCDE. Démontrer que, pour tout point M du plan, $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ML}$.

3°- Soit G le point tel que $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}$.

a) Déduire du 2°- que $2\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GL}=\vec{0}$. Que peut-on dire des points A, G et L ?

b) Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AL}$ puis déterminer les coordonnées de G.

4°- Déterminer les coordonnées du point I ,milieu du segment [AB].

5°- Démontrer l'alignement des points I, G et D.

1. <u>$BCDE$ parallélogramme ?</u>

$BCDE$ parallélogramme ssi $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$

Soit $(x;y)$ les coordonnées de E :

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}3-x\\-3-y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}\ \Leftrightarrow \begin{cases}3-x=-1\\-3-y=-2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$

donc $\boldsymbol{E(4\ ;\ -1)}$

L étant le centre du parallégramme, L est le milieu des segments $[BD]\ et\ [CE]$,

donc : $\boldsymbol{\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{LD}\ et\ \overrightarrow{CL}=\overrightarrow{LE}}$

2. <u>Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ML}$?</u>

<u>Prouvons que $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$:</u>

On sait que : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MD}$ donc… **cqfd**

<u>Prouvons que $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ML}$</u>

$$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{LD}$$
$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{LM}+\overrightarrow{MD}$$
$$\boldsymbol{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ML}}$$

3) On sait que : $\boldsymbol{2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}}$

et $\boldsymbol{\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ML}}$

a) <u>$2\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GL}=\vec{0}$?</u>

On sait que :

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LE} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{LE} = \vec{0}\ (1)$$

Or d'après **2)** (on remplace *M* par *L*),
$\overrightarrow{LE} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LD} = 2\,\overrightarrow{LL} = \vec{0}$,
donc (1) devient : $\boldsymbol{2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GL} = \vec{0}}$,

b) $\underline{\overrightarrow{AG} = 2/3\,\overrightarrow{AL}}$?

$2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GL} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GL}$
donc $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GL}$
donc $\overrightarrow{AG} = 2\,\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{AL}$
donc $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AL}$
donc $\boldsymbol{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AL}}$

Ceci prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires, et donc les points *A*, *G* et *L* sont alignés.

<u>Coordonnées de *G* :</u>

On a : *L*(1 : -2) et *A*(3 ; 3)

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-3 \end{pmatrix}\ et\ \overrightarrow{AL}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}\ donc \begin{cases} x-3 = \frac{2}{3}\times(-2) \\ y-3 = \frac{2}{3}\times(-5) \end{cases} donc \begin{cases} x = -\frac{4}{3}+3 = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{10}{3}+3 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

D'où : $\boldsymbol{G\left(\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right)}$

4. I(1 ; 1)

5. <u>I, G et D sont alignés ?</u>
On sait que : $G\left(\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$ I(1 ; 1) D(3 : -3)

$$\overrightarrow{IG}\left(\frac{2}{3};\ -\frac{4}{3}\right)\ et\ \ \overrightarrow{ID}\ (2\ ;\ -4)$$

donc $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$,
ce qui prouve que $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{ID}$ *sont colinéaires* ***donc I, G et D sont alignés.***