Fonction du Troisième degré

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x$

   a) On admet que f est croissante sur $]-\infty;\ -1]$, décroissante sur $[-1; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
   Dresser le tableau de variation et un tableau de valeurs de f sur $\mathbb{R}$.
   Construire la courbe représentative de f, puis déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^3 - 3x = -2 \quad (E)$.

   b) Vérifier que – 2 est solution de (E).
   On admet que $x^3 - 3x + 2$ peut se factoriser sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c)$.
   Par quoi peut-on donc factoriser $x^3 - 3x + 2$?
   Effectuer cette factorisation, puis en déduire une factorisation de $x^3 - 3x + 2$ sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré.

   c) En déduire les solutions de (E).

   d) Par lecture graphique, trouver le nombre de solutions de $x^3 - 3x = -1 \quad (E_{-1})$.

   e) Faire de même pour l'équation $x^3 - 3x - m = 0 \quad (E_m)$, lorsque :

$$m < -2; \quad -2 < m < 2; \quad m = 2; \quad m > 2$$

2. Au XVI[e] siècle, Cardan et Bombelli ont démontré que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet :
   - Trois solutions lorsque le nombre $K = 4p^3 + 27q^2$ est négatif ou nul.
   - Une seule solution lorsque ce nombre est strictement positif.

   a) Calculer le nombre K pour l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$
   En déduire le nombre de solutions de cette équation.

   b) Exprimer le nombre K_m en fonction de m pour l'équation : $x^3 - 3x + m = 0 \quad (E_m)$,
   puis déterminer son signe suivant les valeurs de m.
   Comparer les résultats obtenus avec la question **1.e)**.