Exercices 6 et 7
Pour pouvoir les traiter, il faut se rappeler la notion suivante :

si a et b sont deux entiers, on dit que a divise b
si et seulement si
il existe un entier relatif k tel que $b=ka$

Il convient donc d'utiliser cette égalité pour effectuer l'hérédité.

Démonstration par l'absurde :
Le fait que a et b divisibles par c entraîne $a-b$ divisible par c est très utile. Si vous ne l'avez pas compris auparavant, cette simple remarque vous permet de comprendre l'algorithme de détermination du PGCD de deux entiers que vous avez vu en 3ème.

Attardez-vous sur cette démonstration car vous n'avez que peu d'occasions de la rencontrer au lycée :

Prouvons que si a et b sont divisibles par c, alors $a-b$ est divisible par c :
Si a et b sont divisibles par c, alors il existe deux entiers k et k' tels que :
$a=kc$ et $b=k'c$
Donc : $a-b=kc-k'c=c(k-k')$, ce qui prouve que $a-b$ est aussi divisible par c.

Supposons que 10^n+1 est divisible par 9 quel que soit n (c'est le contraire de ce que nous cherchons à prouver).
Nous savons que 10^n-1 est divisible par 9 pour tout entier naturel n.
D'après ce que nous venons de prouver, puisque 10^n+1 et 10^n-1 sont divisibles par 9,
$10^n+1-(10^n-1)$ est aussi divisible par 9.
Or $10^n+1-(10^n-1)=2$ et 2 n'est pas divisible par 9, ce qui est absurde.
On en déduit que notre hypothèse 10^n+1 est divisible par 9 est fausse quel que soit n.

CQFD

Exercice 14
Cet exercice présente une difficulté : si on cherche à encadrer u_{n+1} tel qu'il est défini dans l'énoncé, on obtient un encadrement qui ne répond pas à ce que l'on souhaite.

L'astuce est d'écrire u_{n+1} différemment et d'encadrer cette nouvelle expression de u_{n+1}. On obtient cette fois un encadrement encore plus fin que ce que l'on souhaite !

On a, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=\frac{1+2u_n}{2+u_n}$$

Pour écrire u_{n+1} sous forme d'une somme d'un entier et d'un quotient, il faut écrire le numérateur s sous la forme : $k\times \textit{dénominateur}+\textit{nombre}$, k étant un entier relatif.
Pour cela on remarque que $2(2+u_n)=4+2u_n$.
Il nous faut donc faire apparaître $4+2u_n$ au numérateur et compenser en ajoutant un entier relatif :

$$u_{n+1}=\frac{1+2u_n}{2+u_n}=\frac{4+2u_n-3}{2+u_n}$$

$$u_{n+1}=\frac{2(2+u_n)-3}{2+u_n}$$

$$u_{n+1}=2-\frac{3}{2+u_n}$$

Il suffit maintenant d'effectuer un encadrement de $-\frac{3}{2+u_n}$, sans se tromper dans les opérations :

Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n \leq 1$

donc $2 < 2+u_n \leq 3$

donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2+u_n} < \frac{1}{2}$ attention, on inverse l'ordre !

Donc $-\frac{3}{2} < -\frac{3}{2+u_n} \leq -\frac{3}{3}$ attention, on inverse de nouveau l'ordre !!

Donc $-\frac{3}{2} < -\frac{3}{2+u_n} \leq -1$

Il suffit donc d'ajouter 2 :

$$0{,}5 < u_{n+1} \leq 1$$

On obtient donc non seulement que u_{n+1} est inférieur à 1 (ce qu'on voulait), mais encore qu'il est supérieur à 0,5 ce qui est encore mieux que ce que l'on cherchait à démontrer...