Exercice 1

a) $\ln 81 + \ln 27 = \ln 3^4 + \ln 3^3$

$= 4\ln 3 + 3\ln 3$

$= 7\ln 3$

b) $\ln 9\sqrt{3} = \ln 9 + \ln \sqrt{3}$

$= \ln 3^2 + \ln 3^{1/2}$

$= 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3$

$= \frac{5}{2}\ln 3$

c) $2\ln \frac{1}{9} - 3\ln e^{-2} = 2\ln 3^{-2} - 3\times(-2)$

$= -2\times 2\ln 3 + 6$

$= 6 - 4\ln 3$

Exercice 2

a) $\ln 0{,}32 + \ln 1000 = \ln(32\times 10^{-2}) + \ln 10^{+3}$

$= \ln 32 + \ln 10^{-2} + \ln 10^{+3}$

$= \ln 2^5 - 2\ln 10 + 3\ln 10$

$= 5\ln 2 + \ln 10$

$= 5\ln 2 + \ln 2 + \ln 5$

$= 6\ln 2 + \ln 5$

b) $2\ln 125 - \ln \frac{1}{64} = 2\ln 5^3 - \ln 2^{-6}$

$= 6\ln 5 + 6\ln 2$

c) $5\ln 20 - 3\ln \frac{1}{32} = 5\ln 2^2 + 5\ln 5 - 3\ln 2^{-5}$

$= 10\ln 2 + 5\ln 5 + 15\ln 2$

$= 25\ln 2 + 5\ln 5$

Exercice 3

a) $\ln(\sqrt{7}-\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{7}+\sqrt{3}) = \ln(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

$= \ln(7-3)$

$= \ln 4$

b) $\ln(3+\sqrt{5})^2 + \ln(3-\sqrt{5})^2 = 2\ln(3+\sqrt{5}) + 2\ln(3-\sqrt{5})$

$= 2(\ln(3+\sqrt{5}) + \ln(3-\sqrt{5}))$

$= 2\ln(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$

$= 2\ln(9-5)$

$= 2\ln 4$

$= 4\ln 2$

c) $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \dots + \ln\frac{48}{49} + \ln\frac{49}{50}$

$= \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\dots\times\frac{48}{49}\times\frac{49}{50}\right)$

$= \ln\frac{1}{50}$

$= -\ln 50$

d) $\ln(e^{2x}) - \ln 2e^x = 2x - \ln 2 - \ln e^x$

$= 2x - x - \ln 2$

$= x - \ln 2$

Exercice 4

$\ln(e^x+3x) - x = \ln\left(1+3\frac{x}{e^x}\right)$ pour tout $x>0$?

$\ln(e^x+3x) - x = \ln(e^x+3x) - \ln e^x$

$= \ln\frac{e^x+3x}{e^x}$

$= \ln\left(1+\frac{3x}{e^x}\right)$

Exercice 5

a) $6 \ln \sqrt{2} - \ln \frac{2^3}{3} = \ln \frac{1}{3}$?

$$6 \ln \sqrt{2} - \ln \frac{2^3}{3} = 6 \ln 2^{\frac{1}{2}} - \ln 2^3 - \ln \frac{1}{3}$$
$$= 3 \ln 2 - 3 \ln 2 - \ln \frac{1}{3}$$
$$= -\ln \frac{1}{3}$$

l'égalité proposée est donc fausse.

b) Pour tout x de $]-1;1[$, $\ln(1-x^2) = \ln(1-x) + \ln(1+x)$

$\forall x \in]-1;1[$, $1-x^2>0$ donc $\ln(1-x^2)$ existe

$\forall x \in]-1;1[$, $1-x>0$

$\forall x \in]-1;1[$, $1+x>0$

donc $\ln(1-x)$ et $\ln(1+x)$ existent.

l'égalité proposée est donc vraie.

c) Pour tout $x \neq 0$

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$

$\ln x^2$ existe pour tout $x \neq 0$ car $x^2>0$

mais $\ln x$ n'existe pas pour $x<0$

l'égalité proposée est donc fausse pour tout $x \neq 0$

d) Pour tout x réel, $e^{2x}+1>0$ et $e^{-2x}+1>0$

$$\ln(e^{2x}+1) - \ln(e^{-2x}+1) = 2x$$

$$\ln(e^{2x}+1) - \ln(e^{-2x}+1) = \ln(e^{2x}+1) - \ln(e^{-2x}(1+e^{2x}))$$
$$= \ln(e^{2x}+1) - \ln e^{-2x} - \ln(1+e^{2x})$$
$$= -\ln e^{-2x}$$
$$= -(-2x)$$
$$= 2x$$

l'égalité est donc vraie pour tout x