Rappel sur la loi de Bernoulli :

On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre *p***, toute expérience aléatoire admettant deux issues exactement :

• L'une appelée **succès** notée s dont la probabilité de réalisation est ***p***

• L'autre appelée **échec** notée $\bar{s}$ dont la probabilité de réalisation est $\overline{\boldsymbol{p}}$

Ex :

- Lancer une pièce de monnaie et obtenir pile ou face. Succès si face et échec si pile.

- Choisir au hasard une personne dans un groupe : succès si cette personne est une femme, et échec si c'est un homme.

- Choisir au hasard une pièce dans une production : succès si elle est sans défaut, échec si elle présente un défaut.

On appelle **schéma de Bernoulli** comportant ***n*** épreuves (*n* entier naturel non nul) de **paramètre *p*** , toute expérience consistant à répéter ***k*** fois de **façon indépendante** une même épreuve de Bernoulli de paramètre *p*.

Ex : En reprenant les exemples précédents

- On lance 6 fois une pièce de monnaie. Le paramètre de l'expérience est $p = ½$ si la pièce est équilibrée.

- Le groupe doit être de taille très importante pour que les épreuves soient indépendantes. On choisit 11 personnes.
On suppose que 60% des personnes de ce groupe sont des femmes. Alors le paramètre de l'expérience est $p = 0,6$.

- Idem : il doit y avoir un très grand nombre de pièces. On en choisit 20.
Si 0,15% présentent un défaut, alors le paramètre de l'expérience est $p = 0,9985$.

Dans un schéma de ***n*** épreuves de Bernoulli de **paramètre** *p*, **la variable aléatoire *X* qui prend pour valeurs le nombre de succès** obtenus a pour **loi de probabilité :**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

pour tout entier k tel que : $0 \leq k \leq n$

$\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».

On dit que *X* suit une loi binomiale de paramètres *n* et *p* , notée $\mathcal{B}(n , p)$

Pour calculer $\binom{20}{5}$ avec la Casio :

Menu Run (Menu 1)

OPTN

PROB

20 nCr 5

Exe

Ex : En reprenant les exemples précédents

- Si on cherche la probabilité d'obtenir 4 fois pile sur 6 lancers. Il y a donc 2 succès :

X suit une loi de probabilité de paramètres (6, ½)

$$P(X = 2) = \binom{6}{2} 0{,}5^2 (1-0{,}5)^4$$

- Si on cherche la probabilité de choisir exactement 7 femmes parmi 11 personnes, la probabilité est :

X suit une loi de probabilité de paramètres (20 ; 0,6)

$$P(X=7)=\binom{11}{7}0{,}6^7(1-0{,}6)^4$$

- Si on cherche la probabilité de choisir exactement 15 pièces sans défaut parmi les 20,

X suit une loi de probabilité de paramètres (15 ; 0,9985)

$$P(X=15)=\binom{20}{15}0{,}9985^{15}\times 0{,}0015^5$$

Exercice 1

5 points-Commun à tous les candidats

Partie A

Cette première partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes trois réponses sont proposées, une seule de ces réponses convient.
Sur votre copie, noter le numéro de la question et recopier la réponse exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une seule réponse est acceptée.

Barème: Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point; l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total donne un nombre négatif, la note attribuée à cette partie sera ramenée à zéro.

Rappel de notations: $p(\mathrm{A})$ désigne la probabilité de A, $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ signifie la probabilité de « A ou B » et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ signifie la probabilité de « A et B ».

1. On lance un dé cubique équilibré. Les faces sont numérotées de 1 à 6.

La probabilité d'obtenir une face numérotée par un multiple de 3 est

16
13
12

2. Soient A et B deux événements tels que $p(\mathrm{A}) = 0{,}2$, $p(\mathrm{B}) = 0{,}3$ et $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1$; alors

$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}4$
$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}5$
$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}6$

3. Soient A et B deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors on a obligatoirement:

$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0$
$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$
$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$

4. Une expérience aléatoire a trois issues possibles: 2 ; 3 et a (où a est un réel).
On sait que $p(2) = 12$, $p(3) = 13$ et $p(a) = 16$.
On sait de plus que l'espérance mathématique associée est nulle. On a alors

$a = -12$
$a = 6$
$a = -5$

Partie B

Dans cette partie toutes les réponses seront justifiées.

Dans un club de sport, Julien joue au basket. Il sait que lors d'un lancer sa probabilité de marquer un panier est égale à 0,6.

1. Julien lance le ballon quatre fois de suite. Les quatre lancers sont indépendants les uns des autres.

a. Montrer que la probabilité que Julien ne marque aucun panier est égale à 0,0256.

b. Calculer la probabilité que Julien marque au moins un panier.

2. Combien de fois Julien doit-il lancer le ballon au minimum pour que la probabilité qu'il marque au moins un panier soit supérieure à 0,999 ?
Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Rappel : Evénements indépendants

Soit A et B deux événements d'un même univers Ω.

On dit que A et B sont deux événements indépendants si et seulement si :

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$$

Rque :

Si A est de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_A(B) = P(B)$$

De même, B est de probabilité non nulle, A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P_B(A) = P(A)$$

Exercice 2

*5 points-**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité***

Un collectionneur de pièces de monnaie a observé que ses pièces peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b. Il prélève au hasard une pièce dans sa collection.

On note A l'évènement : " Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut a ".
On note B l'évènement : " Une pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut b ".
On note A et B les évènements contraires respectifs de A et B.

On donne les probabilités suivantes : $p(\mathrm{A}) = 0{,}2$; $p(\mathrm{B}) = 0{,}1$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}25$.

Dans cet exercice, toutes les valeurs approchées des résultats demandés seront arrondies au centième.

Première partie

1. Démontrer que la probabilité de l'évènement : " une pièce prélevée au hasard dans la collection présente les deux défauts " est égale à 0,05.

2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3. Démontrer que la probabilité de l'évènement " une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts " est égale à 0,75.

4. Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente également le défaut a.

5. Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui ne présentent pas le défaut b. Calculer la probabilité que cette pièce présente le défaut a.

Deuxième partie

On prélève au hasard trois pièces dans la collection et on suppose que le nombre de pièces de la collection est suffisamment grand pour considérer ces trois prélèvements comme étant indépendants.

1. Calculer la probabilité qu'une seule des trois pièces soit sans défaut.
2. Calculer la probabilité qu'au moins une des trois pièces soit sans défaut.

Exercice 3 (5 points)

*(Pour les candidats **n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**)*

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défaillants ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défaillants ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défaillants.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc.
On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf » ;
- R : « L'ordinateur est récent » ;
- A : « L'ordinateur est ancien » ;
- D : « L'ordinateur est défaillant » ;
- D : l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant.
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défaillant est égale à 0,1325.
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défaillant.
   Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.
5. Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
   Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défaillant.
   Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

Exercice 4

(5 points)-Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

- 50 % des clients choisissent la destination A.
- 30 % des clients choisissent la destination G.
- 20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction.

Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G.

On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis.
On note les évènements :

- A : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A ";
- G : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G ";
- M : " le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M ";
- S : " le questionnaire est celui d'un client satisfait ";
- S : " le questionnaire est celui d'un client insatisfait ".

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2.a. Traduire par une phrase les évènements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités
$P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.

b. L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer $P(A \cap S)$.

c. En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement A est réalisé.

3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

4. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'évènement : " les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits " (on donnera le résultat arrondi au millième).

Exercice 5

5 points-Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un site internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères. Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé.
Sur ce site, une étude statistique a montré que :

- 35 des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ;
- 13 des annonces reçoit une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ;

Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

- L : l'événement "l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution" ;
- T : l'événement "l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours" ;
- A : l'événement "l'annonce ne reçoit aucune enchère" ;
- S : l'événement "le vendeur est satisfait du prix de vente final de sont objet" et S son événement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait de prix de vente final.

3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64.

4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce (le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième) ?

5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements de ces enchères sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente d'au moins deux de ces jeux vidéo (le résultat sera donné sous forme décimale, arrondi au centième).