

La fonction d'Ackerman

Cette fonction A est une fonction de deux entiers naturels définie ainsi :

$$A(0, n) = n + 1 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}$$

$$A(m + 1, 0) = A(m, 1) \text{ pour tout } m \text{ de } \mathbb{N}$$

$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n)) \text{ pour tout } n \text{ et } m \text{ de } \mathbb{N}$$

*La définition de cette fonction peut paraître curieuse puisqu'elle fait appel à elle-même !
C'est une fonction récursive qui joue un rôle important en informatique.*

1. Calculer $A(0, 0)$, $A(0, 1)$, $A(1, 0)$.

2. Calculer $A(m, n)$ pour $m \leq 3$ et $n \leq 5$.

On présentera les résultats dans un tableau.

3. Emettre des conjectures sur les expressions de $A(1, n)$, $A(2, n)$ en fonction de n et les démontrer.

4. Démontrer que $A(3, n) = 2^{n+3} - 3$ pour tout $n \geq 0$.