La somme de deux nombres strictement positifs, dont l'un est non nul, n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Par l'absurde : *je suppose le contraire de ce que je veux prouver, et je montre que j'arrive à un résultat absurde.*

Supposons que $x^2 + a^2$ est factorisable dans $\mathbb{R}$, a étant un réel non nul.

Alors il existe deux réels $\gamma \; et \; \beta$ tels que :

$$x^2 + a^2 = (x + \gamma)(x + \beta)$$

On a :

$(x + \gamma)(x + \beta) = x^2 + (\gamma + \beta)x + \gamma\beta$

D'où : $$x^2 + a^2 = x^2 + (\gamma + \beta)x + \gamma\beta$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \gamma + \beta = 0 \\ \gamma\beta = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta \\ -\beta^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta = 0 \\ a = \beta = 0 \end{cases}$$

Impossible car par hypothèse, a est non nul.

On ne peut donc pas factoriser la somme de deux nombres positifs, dont l'un est non nul.

cqfd