T$^{\text{ale}}$ S 1 et 4

Mathématiques
Epreuve de 4 heures

Mardi 5 janvier 2 016

Exercice 1 : 4 *points*

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en **justifiant la réponse**. *Toute réponse non justifiée sera comptée 0 point.*

1) **Affirmation 1** : l'équation $e^x = 3$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Affirmation 2 : La fonction g est croissante sur $\left[\frac{3\pi}{8} ; \frac{7\pi}{8}\right]$.

3) On note h la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Affirmation 3 : La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote à la courbe représentative C_h.

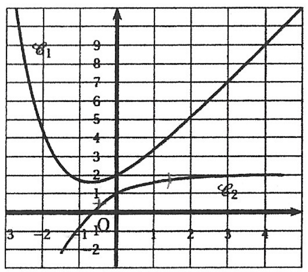
4) f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.

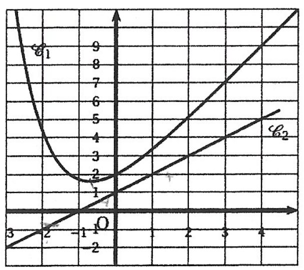
Dans les trois situations ci-dessous, on a la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f.

Affirmation 4 : Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction dérivée f'.

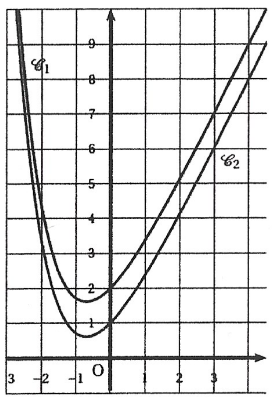
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



Exercice 2 : 5 *points*

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation " pur jus ".

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles " pur jus " est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation " pur jus ".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse.

On définit les évènements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de " pur jus ".

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. On prélève au hasard une bouteille. Montrer que la probabilité qu'il s'agisse d'une bouteille de jus d'orange "pur jus" est égale à 0,1.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille "pur jus". Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.
4. Les évènements R et J sont-ils indépendants ?
5. Calculer la valeur exacte de x.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles " pur jus " dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

2. A combien de bouteilles "pur jus" peut-on s'attendre sur un tel lot ?

3. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient " pur jus ". On arrondira le résultat au millième.

Exercice 3: 5 *points*

Partie A

On considère l'algorithme suivant:

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape. Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 3$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3
u_n	1	$-0{,}5$	$-0{,}75$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,
$$u_{n+1} > u_n.$$
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : 6 *points*

Partie A : On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (*on pourra poser* $X = -x$).

En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

Partie B :

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas.
Il réalise le schéma de ce toboggan en perspective cavalière (figure 1).

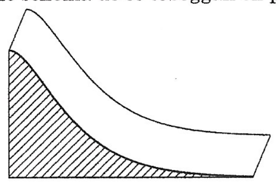


figure 1

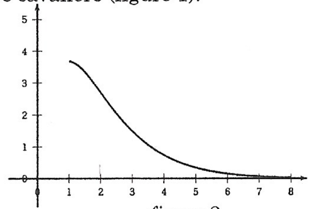


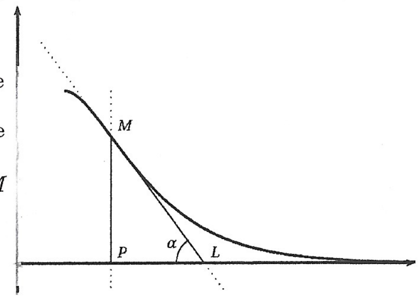
figure 2

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ (figure 2) représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a.
3. On souhaite que le toboggan se "rapproche" de plus en plus du sol.
Prouver que c'est bien le cas.

Partie C : Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différente de 1.
On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure ci-contre illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 8]$.
On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1 ; 8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1 ; 8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1 ; 8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$.
Justifier que : $\tan \alpha = |f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?